ΘΕΩΡΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

Σεπτέμβριος 2015

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2.5 μονάδες το καθένα). **Καλή Επιτυχία.**

Θέμα 1 : *i)* Να βρεθεί η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της συνάρτησης $f(x) = x^4 - x^2 + x$, ορισμένης στο διάστημα $[-1,1]$, στον P_3, χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Chebyshev.
ii) Ποιά θα είναι η βέλτιστη προσέγγιση της ίδιας συνάρτησης στον P_2 και στον P_1 και γιατί;

Θέμα 2 : Να βρεθεί η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της $f \in X_5$, στον P_1, όπου

$$X_5 = \{-2,-1,0,1,2\} \quad \text{και} \quad \begin{array}{c|ccccc} x_i & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline f_i & -2 & -3 & -2 & -1 & 2 \end{array},$$

χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο εναλλαγής σημείων ξεκινώντας με $x_\sigma = \{-2,-1,0\}$.

Θέμα 3 : Να βρεθεί η προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων της συνάρτησης $f \in X_4$, στον P_2, όπου

$$X_4 = \{-2,-1,1,2\} \quad \text{και} \quad \begin{array}{c|cccc} x_i & -2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline f_i & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array},$$

χρησιμοποιώντας ορθογώνια πολυώνυμα στο σύνολο X_4 που παράγονται από την αναδρομική σχέση.

Θέμα 4 : Να βρεθεί η κυβική συνάρτηση spline στο $[-2,2]$ που προσεγγίζει τη συνάρτηση f η οποία δίνεται στο σύνολο σημείων

$$\begin{array}{c|cccc} & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_i & -2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline f_i & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \end{array}$$

και $f'(-2) = -\frac{4}{3}$, $f'(2) = \frac{4}{3}$.
Δίνεται ότι το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite στο διάστημα $[x_j, x_{j+1}]$ είναι

$$\begin{aligned} s(x) &= f_j\left[\frac{(x-x_{j+1})^2}{(\Delta x_j)^2} + 2\frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})^2}{(\Delta x_j)^3}\right] + f_{j+1}\left[\frac{(x-x_j)^2}{(\Delta x_j)^2} - 2\frac{(x-x_{j+1})(x-x_j)^2}{(\Delta x_j)^3}\right] \\ &+ s'_j\left[\frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})^2}{(\Delta x_j)^2}\right] + s'_{j+1}\left[\frac{(x-x_{j+1})(x-x_j)^2}{(\Delta x_j)^2}\right]. \end{aligned}$$